§2 Einige Hilfsmittel aus der Funktionentheorie

Wir wollen nun einige Hilfsmittel aus der Funktionentheorie (Theorie der komplex diffb. Fkt.) zur Verfügung stellen. Gute Quellen zur FT sind (unter anderen):

Jänich "Funktionentheorie. Eine Einführung" (eine besonders knappe aber klare Darstellung)

Fischer-Lieb: "Funktionentheorie" (ausführlich)

Rudin "Real and complex analysis".

2.1 Def: Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Fkt. $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ heißt <u>komplex differenzierbar</u> im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, falls der Grenzwert $$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$ existiert.

$f'(z_0)$ heißt dann die <u>komplexe Ableitung</u> von f im Punkt z_0. $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ heißt <u>holomorph</u>, wenn f in jedem Punkt $z_0 \in \mathcal{U}$ komplex diffb. ist.

Es gelten die üblichen Rechenregeln für Ableitungen (Produktregel, Kettenregel, Quotientenregel). Das bemerkenswerte an holom. Fkt. ist, dass sie sich lokal immer in eine Potenzreihe (ihre Taylorreihe) entwickeln lassen. Es gilt:

2.2 Satz Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ eine Fkt. Dann sind äquivalent:

(1) f ist holomorph

(2) Zu jedem $z_0 \in \mathcal{U}$ ex. ein $r > 0$ und $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, mit $\mathcal{U}_r(z_0) \subseteq \mathcal{U}$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \;\; \forall z \in \mathcal{U}_r(z_0)$

<u>Zudem gilt</u>: Die Reihe in (2) konvergiert auf <u>jedem Kreis</u> $U_R(z_0)$ mit $U_R(z_0) \subseteq U$ gegen $f(z)$!

Für einen Beweis siehe Fischer-Lieb: 5.1 + 5.4.

<u>2.3</u> <u>Bemerkung</u>. (1) Der obige Zusatz zu 2.2. ist sehr wichtig: Er sagt, dass man den Konvergenzbereich der Reihe U maximal "ausdehnen" kann

(2) Wie in der Analysis (1) für reelle Fkt. kann man zeigen, dass man eine durch eine Potenzreihe geg. Fkt. $f: U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ immer summandenweise komplex ableiten kann.
Dann folgt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

und per Induktion nach k erhalten wir

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1)\, a_n (z - z_0)^{n-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Insbesondere ist f <u>∞-oft komplex diffb.</u> und

$$f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k \quad , \text{also} \quad a_k := \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} ,$$

dh. die Reihe in 2.2 (2) ist die Taylorreihe von f im EWP z_0!

<u>Fazit</u>: Jede holom. Fkt. $f: U \to \mathbb{C}$ ist auf U ∞-oft komplex diffbar! Im Fall $U = \mathbb{C}$ folgt:

<u>2.4</u> <u>Satz</u> Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $z_0 \in \mathbb{C}$ bel. gewählt. Dann gilt mit $a_n := \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Holom. Fkt. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf ganz $\mathbb{C}$, nennt man auch ganze Funktion. Wählen wir $z_0 = 0$, so erhalten wir $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Bsp für ganze Fkt. sind exp, sin, cos : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

2.5 Bez: $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ heißt Gebiet, wenn $\mathcal{U}$ offen und zusammenhängend ist. ($\mathcal{U}$ heißt zusammenhängend, wenn für alle $A, B \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\mathcal{U} = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$ folgt: $A = \emptyset \vee B = \emptyset$).

2.6 Satz (Identitätssatz für holom. Fkt.)
Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holom. Sei $N_f := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$ die Nullstellenmenge von f.
Dann gilt: besitzt N_f einen Häufungspunkt in $\mathcal{U}$, so ist $f \equiv 0$ auf $\mathcal{U}$ (also $N_f = \mathcal{U}$).
Erinnerung: z_0 ist HPkt von N_f, falls eine Folge $(z_n)_n$ in $N_f \setminus \{z_0\}$ ex. mit $z_n \to z_0$.

2.7 Folgerung: Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und seien $f, g: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holom. Fkt. Dann gilt: Besitzt die Menge $N = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = g(z)\}$ einen HPkt in $\mathcal{U}$, so gilt $f = g$ auf $\mathcal{U}$. (Wende 2.6 auf $f - g$ an).

Beweis von 2.6: Sei A die Menge aller HPkt. von N_f.
Dann ist A abgeschlossen in $\mathcal{U}$, denn da f stetig, ist $f(z_0) = 0$ für jeden HPkt. z_0 von N_f. Dann ist aber jeder HPkt. von A in $\mathcal{U}$ auch HPkt von N_f, und damit wieder in A, d.h. A ist abg. in $\mathcal{U}$.
Wir zeigen nun: A ist auch offen. Dann folgt

$\mathcal{U} = A \cup \mathcal{U}\setminus A$ mit A und $\mathcal{U}\setminus A$ offen, also $A = \emptyset$ oder $\mathcal{U}\setminus A = \emptyset$ da $\mathcal{U}$ zusammenhängend. (12)
Nach Vor. ist $A \neq \emptyset$, also folgt $\mathcal{U} = A \subseteq N_f \subseteq \mathcal{U}$.

Sei dazu $z_0 \in A$. Sei $r > 0$ mit $\mathcal{U}_r(z_0) \subseteq \mathcal{U}$ und sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ die Potenzreihenentw. von f in z_0

<u>Beh</u>: Es gilt $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ (dann folgt $\mathcal{U}_r(z_0) \subseteq A$).
<u>Ann</u>: $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$. Sei dann $n_0 \in \mathbb{N}$ minimal mit dieser Eigenschaft.
Da $0 = f(z_0) = a_0$ folgt $n_0 > 0$. Wir def dann

$$g : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \ ; \ g(z) = \begin{cases} a_{n_0} & \text{für } z = z_0 \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n_0}} & \text{für } z \neq z_0 \end{cases}.$$

Dann ist g holomorph, denn g ist holom auf $\mathcal{U}\setminus\{z_0\}$ nach Quotientenregel und g ist holom in z_0, da für alle $z \in \mathcal{U}_r(z_0)$ gilt

$$g(z) = (z-z_0)^{-n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+n_0} (z-z_0)^n,$$

d.h. g besitzt in z_0 eine Potenzreihenentwicklung.
Dann folgt auch $g(z_0) = a_{n_0} \neq 0$, und da g stetig ist, ex. ein $0 < \varepsilon \leq r$ mit $g(z_0) \neq 0$ auf $\mathcal{U}_\varepsilon(z_0)$.
Da $z_0 \in A$ ex. nach Vor. eine Folge $(z_n)_n$ in $\mathcal{U}\setminus\{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$ und $f(z_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Für n groß genug folgt dann $z_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(z_0)$, also

$$0 \neq g(z_n) = (z_n - z_0)^{-n_0} f(z_n) = 0.$$ Widerspruch! ☒

<u>2.8 Satz</u> (Mittelwerteigenschaft) Sei $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holom und seien $z_0 \in \mathcal{U}$ und $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subseteq \mathcal{U}$.
Dann gilt $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} \, dt.$$

<u>Beweis</u>: Wähle $R > r$ mit $U_R(z_0) \subset U$. Dann gilt für alle $z \in U_R(z_0)$: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ mit $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Da $r<R$ konvergiert die Reihe <u>gleichmäßig</u> auf $B_r(z_0)$ (Analysis I, II). Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (re^{it})^k e^{-int}\, dt$$

$$\underset{\text{glm. Konv}}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\, dt}_{= \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq n \\ 2\pi & \text{für } k = n \end{cases}} = a_n r^n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} r^n.$$

∎

Als wichtige Folgerungen erhalten wir:

<u>2.9</u> <u>Satz</u> (Liouville) Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und <u>beschränkt</u>. Dann ist f konstant.

<u>Bew</u>: Nach 2.4 gilt $\forall z \in \mathbb{C}$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Nach 2.8 gilt dann für alle $r > 0$ und $0 < n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int}\, dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(re^{it})|}_{\leq C}\, dt \leq \frac{C}{r^n} \to 0,$$

also folgt $a_n = 0$ $\forall n > 0$. Damit folgt $f(z_0) = a_0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. ∎

Ein weiterer wichtiger Satz ist:

<u>2.10</u> <u>Satz</u> (Maximumsprinzip) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt dann $|f|$ auf U ein lokales Maximum, so ist f konstant.

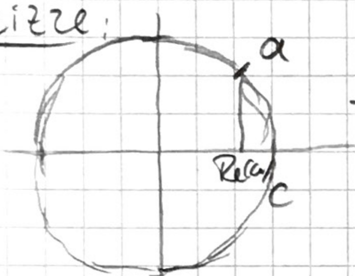
<u>Bew</u>: Sei o.B.d.A. $z_0 \in U$ ein lok. Maximum für $|f|$. Dann ex. ein $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subseteq U$ und $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in B_r(z_0)$. Durch Mult. von f mit $\mu = e^{i\varphi}$

für ein geeignetes $\varphi \in [0, 2\pi)$ können wir o.B.d.A $f(z_0) \geq 0$ annehmen. Nach 2.8 (für $n=0$) gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + s e^{it})\, dt \quad \forall\, 0 \leq s < r.$$

Ann: $\exists\, 0 \leq s \leq r$ und $t_0 \in [0, 2\pi]$ mit $f(z_0 + s e^{it_0}) \neq f(z_0)$. Da $|f(z_0 + s e^{it})| \leq |f(z_0)| = f(z_0)$ folgt $\mathrm{Re}\, f(z_0 + s e^{it_0}) < f(z_0)$ (allg. gilt: Ist $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| \leq c$, $a \neq c$, so $\mathrm{Re}\, a < c$).

Skizze:



Damit folgt:

$$f(z_0) = \mathrm{Re}\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, f(z_0 + s e^{it})\, dt < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0)\, dt = f(z_0).$$

Widerspruch!

Damit folgt $f(z) = f(z_0)$ auf $B_r(z_0)$ und mit 2.7. folgt dann auch $f(z) = f(z_0)$ $\forall z \in U$. ■

<u>2.11 Folgerung</u>: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{U}$ kompakt und sei $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ stetig mit $f|_U$ holomorph. Dann nimmt $|f|$ auf $\partial U = \overline{U} \setminus U$ sein Maximum an.

<u>Bew</u>. Da $\overline{U}$ kompakt und $|f|$ stetig nimmt $|f|$ auf $\overline{U}$ sein Maximum an. Nach 2.10 liegt dies nicht in U oder f ist konstant. ■

Wir benötigen noch:

<u>2.12</u> <u>Lemma</u> Für $r > 0$ sei $U^r(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r \}$. Sind dann $0 < r < R$ und $f : U^r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass f auf $U^R(z_0)$ eine Reihendarstellung der Form $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z - z_0)^n}$ besitzt, so konvergiert die Reihe auch auf ganz $U^r(z_0) \supseteq U^R(z_0)$ gegen $f(z)$

<u>Beweis</u>. Durch Übergang auf $\tilde{f}(z) := f(z - z_0)$ können wir o.B.d.A. $z_0 = 0$ annehmen.
<u>Def.</u> dann $g: \mathcal{U}_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ durch $g(z) = \begin{cases} a_0, & z = 0 \\ f(\frac{1}{z}), & z \neq 0 \end{cases}$
Dann gilt für alle $z \in \mathcal{U}_{\frac{1}{R}}(0)$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \left(= f(\tfrac{1}{z}) \text{ falls } z \neq 0 \right).$$

Damit ist g holom. in 0 und g holomorph auf $\mathcal{U}_{\frac{1}{r}}(0) \setminus \{0\}$ nach Kettenregel, also g holom. auf $\mathcal{U}_{\frac{1}{r}}(0)$. Damit folgt dann mit 2.2, dass

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ für alle } z \in \mathcal{U}_{\frac{1}{r}}(0) \text{ und damit}$$

$$f(z) = g(\tfrac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} \text{ für alle } z \in \mathcal{U}^r(0). \quad \blacksquare$$

Wir ergänzen noch ohne Beweis die folgende Tatsache (siehe z.B. Fischer-Lieb Satz 6.2).

2.13 <u>Satz</u> Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $f_n, f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ Fkt. mit f_n holom. $\forall n \in \mathbb{N}$. Ferner gelte für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathcal{U}$, dass

$$\|f_n - f\|_K := \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Dann ist auch f holomorph und es gilt dann auch $\|f_n' - f'\|_K \to 0$ für $n \to \infty$, $K \subseteq \mathcal{U}$ kpt.